

الحساب التكاملي

1. تكامل دالة متصلة على مجال:

1. تعريف:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ و F دالة أصلية لها على $[a, b]$.

تكامل f من a إلى b هو العدد الحقيقي: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

2. ملاحظات:

- نكتب $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$
- يمكن تغيير x بأي متغير آخر مثلا: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots\dots\dots$

3. خاصيات:

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) dx &= 0 \quad \diamond \\ \int_a^b f(x) dx &= -\int_b^a f(x) dx \quad \diamond \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \diamond \end{aligned}$$

4. خطانية التكامل:

خاصية:

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a, b]$ لدينا:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \color{red}{\oplus}$$

$$(\alpha \in \mathbb{R}) \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \quad \color{red}{\oplus}$$

II. التكامل و الترتيب :

1. خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$. لدينا :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \text{ فإن } f \geq 0 \text{ على } [a,b]$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0 \text{ فإن } f \leq 0 \text{ على } [a,b]$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \text{ فإن } f \leq g \text{ على } [a,b]$$

2. القيمة المتوسطة :

تعريف و خاصية :

- لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$. العدد $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ يسمى القيمة المتوسطة ل f على $[a,b]$
- يوجد على الأقل عدد c من $[a,b]$ بحيث : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

III. تقنيات حساب التكامل :

أ. باستعمال دالة أصلية : سبق الحديث عنها في بداية الدرس

ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء:

خاصية :

لتكن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' متصلتان على I و a و b عنصرين من I لدينا :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

IV. حساب المساحات :

	<p>ليكن المستوى منسوباً إلى معلم متعامد (O, \vec{i}, \vec{j}) وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة O و المتجهين \vec{i} و \vec{j} $1u.A = \ \vec{i}\ \times \ \vec{j}\$</p>
--	--

خاصية 1:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$
مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = a$ و $x = b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)| dx \right) u.A$$

خاصية 2:

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a, b]$
مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (C_g) و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = a$ و $x = b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) u.A$$

حالات خاصة :

مساحة الحيز الملون في الرسم هي:	ملاحظات	رسم توضيحي
$\left(\int_a^b f(x) dx \right) u.A$	f موجبة على المجال $[a, b]$	
$\left(\int_a^b -f(x) dx \right) u.A$	f سالبة على المجال $[a, b]$	
$\left(\int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx \right) u.A$	<ul style="list-style-type: none"> • f موجبة على المجال $[a, c]$ و • f سالبة على المجال $[c, b]$ 	
$\left(\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right) u.A$	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a, b]$	
$\left(\int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx \right) u.A$	<ul style="list-style-type: none"> • (C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a, c]$ و • (C_f) يوجد تحت (C_g) على المجال $[c, b]$ 	

.v حساب الحجم :

خاصية 1:

ليكن (Σ) مجسما محصورا بين المستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتاهما على التوالي: $z = a$ و $z = b$ ($a < b$)
ولتكن $S(t)$ مساحة تقاطع المجسم (Σ) مع المستوى الذي معادلته $z = t$ حيث $a \leq t \leq b$
إذا كانت الدالة: $t \mapsto S(t)$ متصلة على المجال $[a, b]$ فإن V حجم المجسم (Σ) هو $V = \int_a^b S(t) dt$ بوحدة قياس الحجم.

خاصية 2:

حجم المجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a, b]$ هو :
حيث u, v : وحدة الحجم $V = \left[\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right] u, v$

